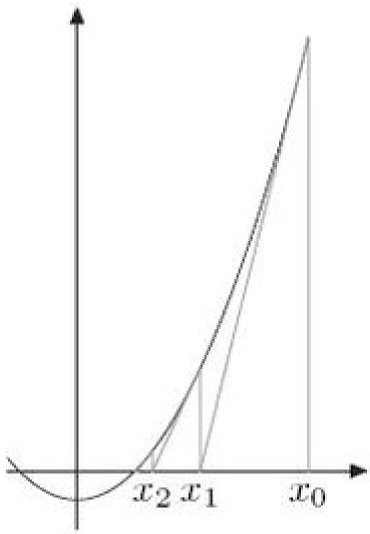
維基百科

牛顿法

维基百科，自由的百科全书

牛顿法（英語：Newton's method）又称为**牛顿-拉弗森方法**（英語：Newton-Raphson method），它是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数$f(x)$的泰勒级数的前面几项来寻找方程$f(x)=0$的根。



目录

起源

牛顿法最初由艾萨克·牛顿在《流数法》（*Method of Fluxions*，1671年完成，在牛顿去世后於1736年公开发表）中提出。约瑟夫·鲍易也曾于1690年在*Analysis Aequationum*中提出此方法。

方法说明

首先，选择一个接近函数$f(x)$零点的x_0，计算相应的$f(x_0)$和切线斜率$f'(x_0)$（这里f'表示函数f的导数）。然后我们计算穿过点$(x_0, f(x_0))$并且斜率为$f'(x_0)$的直线和x轴的交点的x坐标，也就是求如下方程的解：

$$0 = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$$

我们将新求得的点的x坐标命名为x_1，通常x_1会比x_0更接近方程$f(x)=0$的解。因此我们现在可以利用x_1开始下一轮迭代。迭代公式可化简为如下所示：

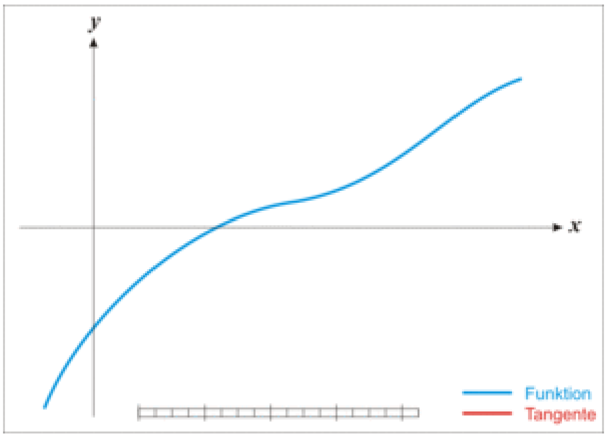
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

已有证明牛顿迭代法的二次收敛[1]必须满足以下条件：

$f'(x) \neq 0$; 对于所有 $x \in I$，其中 I 为区间 $[\alpha - r, \alpha + r]$，且 x_0 在区间其中 I 内，即 $r \geqslant |a - x_0|$ 的;

对于所有 $x \in I$，$f''(x)$ 是连续的;

x_0 足够接近根 α。



蓝线表示方程 f 而红线表示切线。可以看出 x_{n+1} 比 x_n 更靠近 f 所要求的根 x。

其它例子

第一个例子

求方程 $\cos(x) - x^3 = 0$ 的根。令 $f(x) = \cos(x) - x^3$，两边求导，得 $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$。由于 $-1 \leq \cos(x) \leq 1 (\forall x)$，则 $-1 \leq x^3 \leq 1$，即 $-1 \leq x \leq 1$，可知方程的根位于0和1之间。我们从 $x_0 = 0.5$ 开始。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3 \times 0.5^2} &= 1.112141637097 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= \vdots &= \underline{0.}909672693736 \\
x_3 &= \vdots &= \vdots &= \underline{0.86}7263818209 \\
x_4 &= \vdots &= \vdots &= \underline{0.86547}7135298 \\
x_5 &= \vdots &= \vdots &= \underline{0.86547403311}1 \\
x_6 &= \vdots &= \vdots &= \underline{0.865474033102}
\end{aligned}
$$

第二个例子

牛顿法亦可发挥与泰勒展开式，对于函式展开的功能。

求 a 的 m 次方根。

$x^m - a = 0$

设 $f(x) = x^m - a$，$f'(x) = mx^{m-1}$

而a的m次方根，亦是x的解，

以牛顿法来迭代：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{m}(1 - a x_n^{-m})$$

（或 $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{m}\left(x_n-a\frac{x_n}{x_n^m}\right)$）

應用

求解最值問題

牛頓法也被用於求函數的極值。由於函數取極值的點處的導數值為零，故可用牛頓法求導函數的零點，其疊代式為

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

求拐点的公式以此类推

註解

1. 存档副本 (PDF). [2018-06-26]. （原始内容存档 (PDF)于2021-04-24）.

外部連結

- JAVA：牛頓勘根法 (http://episte.math.ntu.edu.tw/java/jav_newton/) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20210424004538/http://episte.math.ntu.edu.tw/java/jav_newton/)，存于互联网档案馆） **（繁體中文）**