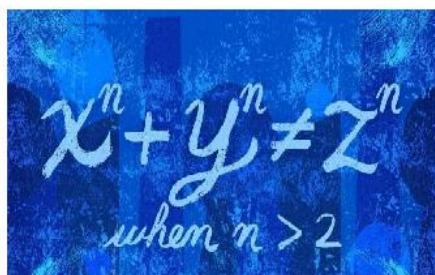


机器如何证明定理

学过初中数学的人都知道，定理证明看起来是件非常需要动脑子的事。一般来说，绝大部分人都会觉得自己面对定理证明都会智商不够。


$$x^n + y^n = z^n$$

when $n > 2$

在数学证明面前我宛如一个智障



幸好，计算机不这么认为，至少比起听说读写来，机器更愿意去证明定理。

事情还得从亚里士多德的三段论讲起。什么是三段论呢？就是给出一个大前提，再给定一个小前提，那么可以推导出一个结论。例如：给定一个大前提“所有人都会死的”，小前提是“苏格拉底是人”，那么可以推出“苏格拉底会死”。这就是一个简单的定理证明过程，要证明的定理是“苏格拉底会死”，三段论就是这个定理的证明过程。

三段论毕竟太简单了，用自然语言描述的事情也不够精确。于是，弗雷格、怀特黑德、罗素等人就想办法用数学语言对人类的推理过程进行了定义，构建了著名的“数理逻辑”。基于数理逻辑严格的表达方式，就可以从已经知道的事实推论出未知的事实，只要已经事实是正确的，那么未知事实也一定是正确的。从已经事实推出未知事实这一思维过程称为“演绎”。再扩展一下，如果我们定义了一套数学公理作为已知事实，原则上就可以演绎出和这些公理相关的所有数学定理。

基于这一思路，普林斯顿高等研究院的马丁·戴维斯(Martin Davis)于 1954 年在一台称为“大强尼”(JOHNNIAC)的电子管计算机上实现了第一个定理证明程序，证明了两个偶数相加还是偶数。

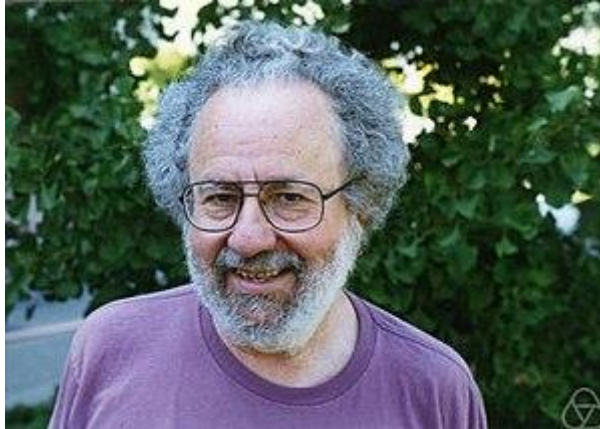


图 2: 马丁-戴维斯, 1954 年实现首个自动定理证明

1956 年, Newell, Shaw 和 Simon 给出了一个称为“逻辑机器” (Logic Theory Machine, LTM) 的定理证明程序。Newell 等人首先分析了人类解决数学问题的方法, 发现人们通常会将难的问题分解成简单问题, 并利用已知的定理、公理和解题规则进行试探性推理, 直到所有子问题都得到解决, 则原来较复杂的问题即可得到解决。他们将这些思路运用到 LTM 程序上, 利用正向推理 (即由原因推理出结果) 和启发式搜索 (在搜索时利用领域相关知识以减小搜索范围), 取得了极大成功。他们将 LTM 运行在 JOHNNIAC 上, 证明了罗素、怀德黑德所著《数学原理》中前 52 个定理的 38 个。1963 年, 经过改进的 LTM 最终完成了《数学原理》第二章全部 52 条数学定理的证明。

1959 年, 美籍华人学者、洛克菲勒大学教授王浩给出了效率更高的“王浩算法”。在一台速度不高的 IBM704 电脑上, 该算法用 9 分钟的时间将《数学原理》中所有定理 (350 条以上) 统统证明了一遍。因为这一成就, 王浩教授在 1983 年的国际人工智能联合会议上荣获首届定理证明里程碑奖。

从此以后, 数学定理证明得到长足进展, 人们提出了很多新方法和新思路, 包括 Robinson 的归结法, 吴文俊教授的几何问题代数化方法等。1976 年 6 月 22 日, 哈肯和阿佩尔宣布他们用机器证明了四色猜想, 成为自动定理证明的代表性工作[2]。



图 3: 为庆祝四色定理证明, UIUC 数学系发布的邮戳

总结起来，计算机将定理证明转化为一个搜索过程，只要给以足够的时间，找到一条由已知事实到目标结论的推理路径是可能的。因任务明确，方案简单，自动定理证明在人工智能领域算是相对容易的，至少在定义清晰、条件简单的任务上是如此。因此，定理证明在人工智能发展初期即取得了重要成果。当然，实际情况也不会那么轻松，如何对已知事实和目标结论进行形式化，如何设计搜索方法以提高效率，这些都不是简单事情。同时，机器给出的证明方法往往比较冗长，不易理解，因此即便机器证出来了，人们还是会想办法去寻找适用于人类思维的证明过程。

[1] Davis M. The early history of automated deduction: Dedicated to the memory of Hao Wang[M]//Handbook of Automated Reasoning. North-Holland, 2001: 3-15.

[2] Appel K., Haken W. (1978) The Four-Color Problem. In: Steen L. A. (eds) Mathematics Today Twelve Informal Essays. Springer, New York, NY.